2018年高中自主招生考试数学试题参考答案

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.）

1. D　　2. B　　3. C　　4. D　　5. A　　6. B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

7. -1　　8. $(x+2y+2)(x+2y-1)$　　9. $\frac{2}{3}\le m\le 1$　　10. 12　　11. 6

12. $\frac{1}{2}$　　13. $\sqrt{3}$　　14. $\frac{13}{5}$ 或 $\frac{17}{5}$　　15. $a+c=2b$　　16. $(\frac{8}{5},\ \frac{8}{5})$

三、解答题（本大题共 8 题，共 86 分.）

17．(本题 10 分)

解：方程两边同乘$(x+2)(x-2)$，得 $2(x+2)+mx=3(x-2)$.

整理，得$(1-m)x=10$. ……………………………………………………2 分

①当 $1-m=0$ 时，该整式方程无解，此时 $m=1$. ……………………………4 分

②当 $1-m\neq 0$ 时，该整式方程的解为 $x=\frac{10}{1-m}$. ……………………………5 分

若该整式方程的解是原分式方程的增根，则原分式方程无解，

即$\frac{10}{1-m}+2=0$ 或$\frac{10}{1-m}-2=0$. ……………………………………7 分

解得 $m=6$ 或 $m=-4$. ……………………………………………………9 分

综上，当 $m=1$ 或 6 或-4 时，原方程无解. ………………………………10 分

18．(本题 10 分)

（1）解：设 OA：$y_1=k_1x$，

∵过点（1.2，72），

∴$y_1=60x$. ……………………………1 分

设 BC：$y_2=k_2x+b$，

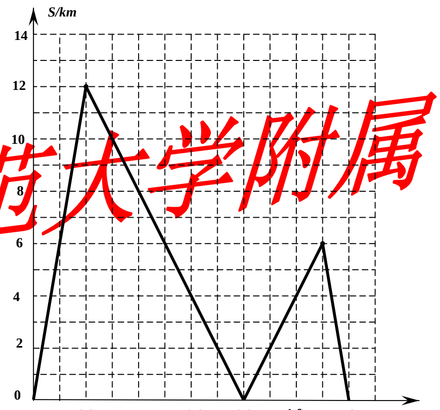
∵过点（0.2，0），（1.1，72）

∴$\begin{cases} 0=0.2k+b \\ 72=1.1k+b \end{cases}$，

解得 $y_2=80x-16$. …………………………………………………4 分

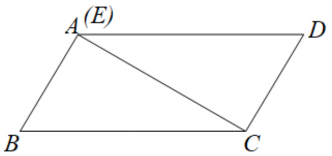
（2）0.1 或 0.5 或 1.1. ……………………………………………………………7 分

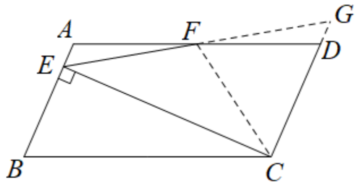
（3）解：如图. ……………………………………………………………………10 分



19．(本题 10 分)解：（1）当 $\alpha=60°$ 时，$BC=2BE$. 此时点 E 与点 A 重合（如图 1），

$CE=BA\cdot\tan B=5\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………3 分


（图 1）


（图 2）

（2）存在正整数 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$. …………………………………………5 分

理由：如图 2，延长 EF、CD 交于点 G.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB/\!/CD$. ∴$\angle A=\angle FDG$，$\angle AEF=\angle G$.

∵F 为 AD 的中点，∴$AF=FD$. ∴$\triangle AEF\cong\triangle DGF$. ∴$EF=FG$. ……………………………7 分

∵$\angle ECG=\angle BEC=90°$，∴$CF=FG$. ∴$\angle FCG=\angle G$. ∴$\angle EFC=2\angle G$. ……………………8 分

∵$DF=CD=5$，∴$\angle FCG=\angle DFC=\angle G$. ……………………………………………………9 分

∴$\angle EFD=3\angle G=3\angle AEF$. ………………………………………………………………10 分

20．(本题 10 分)

解：（1）平行；……………………………………………………………………………………2 分

（2）当 $AC=BD$（或 $OA=OB$）时，四边形 $ABCD$ 是矩形. ……………………………………3 分

因为正比例函数 $y=k_1x$ 与反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像在第一象限相交于点 A，

∴$k_1x=\dfrac{1}{x}$，解得 $x=\sqrt{\dfrac{1}{k_1}}$（负根舍），将 $x=\sqrt{\dfrac{1}{k_1}}$ 代入 $y=k_1x$ 得 $y=\sqrt{k_1}$，

∴点 A 的坐标为（$\sqrt{\dfrac{1}{k_1}}$，$\sqrt{k_1}$），同理点 B 的坐标为（$\sqrt{\dfrac{1}{k_2}}$，$\sqrt{k_2}$），……………5 分

又∵$OA=OB$，∴$\sqrt{\dfrac{1}{k_1}+k_1}=\sqrt{\dfrac{1}{k_2}+k_2}$，两边平方得，整理后得 $\dfrac{1}{k_1}+k_1=\dfrac{1}{k_2}+k_2$，

∴$(k_1-k_2)(k_1k_2-1)=0$，∵$k_1\neq k_2$，∴$k_1k_2-1=0$. 即 $k_1k_2=1$；　………………………6 分

（3）∵P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）（$x_2>x_1>0$）是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 图像上的任意两点，

∴$y_1=\dfrac{1}{x_1}$，$y_2=\dfrac{1}{x_2}$，∴$a=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$，……………………………………7 分

∴$a-b=\dfrac{x_1+x_2}{2x_1x_2}-\dfrac{2}{x_1+x_2}=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}$，…………………………………………8 分

∵$x_2>x_1>0$，∴$(x_1-x_2)^2>0$，$x_1x_2>0$，$x_1+x_2>0$，

$\therefore a-b=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}>0$，

$\therefore a-b>0$，$\therefore a>b$. ……………………………………………………………………10 分

21．(本题 10 分)

解：(1) ∵AD 是⊙Q 的直径，∴∠AEB=∠AED=90°. ∴∠AEB=∠AOB=90°.

∵BA 垂直平分 CD, ∴BC=BD. ∴∠ABO=∠ABE.

又∵BA=BA, ∴△ABE≌△ABO. ∴AE=AO=4. ……………………………………………2 分

(2) 设 $BO=x$，则 $AB=x+2$.

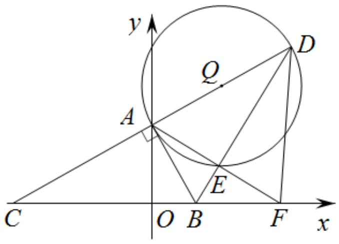
在 Rt△ABO 中，由 $AO^2+OB^2=AB^2$ 得 $4^2+x^2=(x+2)^2$，解得 $x=3$.

$\therefore OB=BE=3$. ……………………………………………………………………………3 分

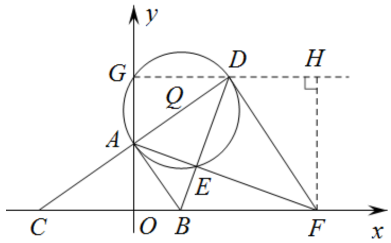
∵∠EAB+∠ABE=90°, ∠ACB+∠ABC=90°, ∴∠EAB=∠ACB.

∵∠BFA=∠AFC, ∴△BFA∽△AFC. ……………………………………………………………4 分

$\therefore \dfrac{AF}{CF}=\dfrac{BE}{AO}=\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{3}{4}$. ………………………………………………………………5 分



(图 1)



(图 2)

(3) ①如图 1，当△DEF∽△AEB 时，有∠BAE=∠FDE.

∴∠ADE=∠FDE. ∴BD 垂直平分 AF. ∴AB=BF. ∴∠BAE=∠BFE.

∴∠BAE=∠BFE=∠BAO=30°. ∴ $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{1}{3}$. ………………………………………………………………………………7 分

②如图 2，设⊙Q 交 y 轴于点 G，连接 DG，作 FH⊥DG 于 H.

当△DEF∽△BEA 时，有∠ABE=∠FDE.

∴∠DAE=∠DAG=∠FDE=∠FDH. ∴AG=AE=4, FE=FH=OG=8.

$\therefore \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{1}{2}$. ∴ $\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………9 分

$\therefore \dfrac{BE}{DE}$ 的值是 $\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………10 分

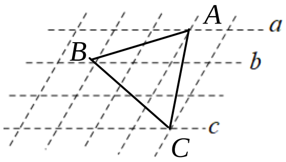
22．(本题 10 分)

图 2 中边长 $\sqrt{5}$；…………………………………………………………………………1 分

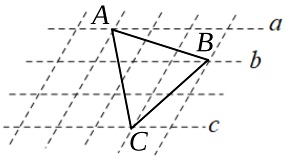
（1）画图如下，边长 $\sqrt{7}$；…………………………………………………………………7 分

（2）边长 $\frac{\sqrt{21}}{3}$. ………………………………………………………………………10 分

两种画图方案（画出其中一种即可）：



（图 3）



（图 3）

23．(本题 14 分)

解：（1）由抛物线的轴对称性可知，抛物线的图像经过点（0，2）和点（4，2），

则 $\begin{cases}2=16a+16+c,\\2=c.\end{cases}$． 解得 $\begin{cases}a=-1,\\c=2.\end{cases}$

∴ $y=-x^2+4x+2$．…………………………………………………………………2 分

∴当 $x=2$ 时，$y=6$．

∴顶点 A 的坐标是（2，6）．………………………………………………………3 分

（2）如图 1，过点 C 作 $CE\perp AH$ 于 E，过点 P 作 $PF\perp AC$ 于 F，

则 $CE=2$，$AE=4$， $AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

∵ $\angle AFP=\angle AEC=90°$， $\angle FAP=\angle EAC$， ∴ $\triangle AFP\backsim\triangle AEC$.

∴ $\frac{PF}{AF}=\frac{CE}{AE}=\frac{1}{2}$．

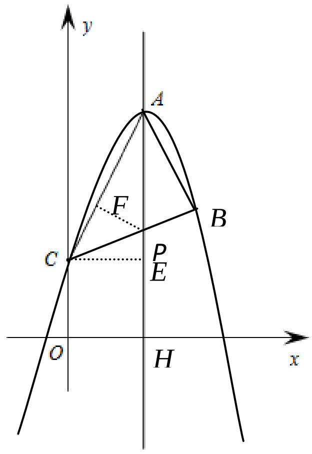
∵ $\angle FCP=45°$， ∴ $CF=PF$． ……………………………………………………5 分

设 $CF=PF=m$，则 $AF=2m$，

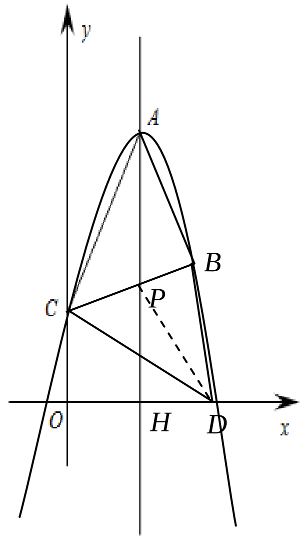
∴ $m+2m=2\sqrt{5}$． ∴ $m=\frac{2\sqrt{5}}{3}$．

∴ $AP=\frac{10}{3}$． ∴ $PH=\frac{8}{3}$．

∴ P（2，$\frac{8}{3}$）． ………………………………………………………………7 分



（图 1）



（图 2）

（3）①如图 2，当点 D 落在 x 轴的正半轴上时，

$CD=AC=2\sqrt{5}$，又∵$OC=2$，∴$OD=4$．

由对称性可知 $AP=PD$， 设 $PH=m$，则 $AP=PD=6-m$．

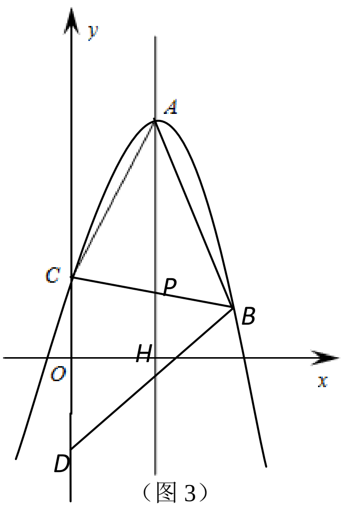
在 Rt△ DPH 中，有 $PH^2+HD^2=PD^2$，

即 $m^2+2^2=(6-m)^2$， 解得 $m=\dfrac{8}{3}$． ∴P_1（2，$\dfrac{8}{3}$）．……………………………9 分

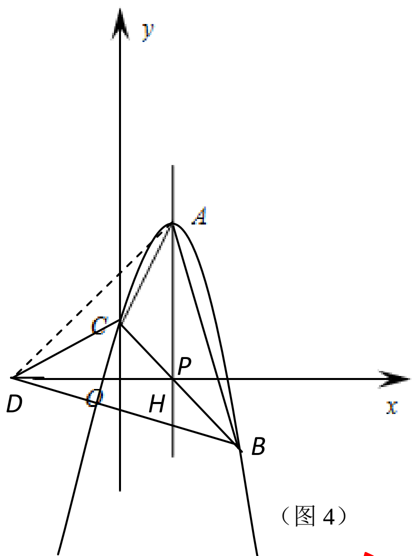
②如图 3，当点 D 落在 y 轴的负半轴上时，$CD=AC=2\sqrt{5}$，

由对称可知∠DCP=∠ACP，又∵AH∥OC，∴∠DCP=∠APC．

∴∠APC=∠ACP．∴$AC=AP=2\sqrt{5}$．∴$PH=6-2\sqrt{5}$． ∴P_2（2，$6-2\sqrt{5}$）．…11 分



（图 3）



（图 4）

③如图 4，当点 D 落在 x 轴的负半轴上时，$CD=AC=2\sqrt{5}$，

又∵$OC=2$，∴$OD=4$．∴$DH=AP=6$．

连接 AD，∴直线 CH 是线段 AD 的中垂线，又点 P 在直线 AH 上，

∴点 P 与点 H 重合．∴P_3（2，0）．……………………………………………………13 分

由上①②③得点 P 的坐标为 P_1（2，$\frac{8}{3}$）、P_2（2，$6-2\sqrt{5}$）、P_3（2，0）．………14 分

24．(本题 12 分)

解:（1）点 A 和线段 BC 的“中立点”的是点 D，点 F；………………………………4 分

（2）点 A 和⊙G 的“中立点”在以点 O 为圆心、半径为 1 的圆上运动.

因为点 K 在直线 $y=-x+1$ 上，

设点 K 的坐标为（x，$-x+1$），

则 $x^2+(-x+1)^2=1^2$ **错误!未找到引用源。**，解得 $x_1=0$，$x_2=1$ **错误!未找到引用源。**.

∴点 K 的坐标为（0，1）或（1，0）. ……………………………………………………8 分

（3）（说明：点 N 与⊙C 的“中立点”在以线段 NC 的中点 P 为圆心、半径为 1 的圆上运动. ⊙P 与 y 轴相切时，符合题意.）

∴ 点 N 的横坐标的取值范围为 $-6\le x_N\le -2$ **错误！未找到引用源。**. ……………………………………12 分