安师大附中 2020 年自主招生考试数学参考答案

一、填空题（每题 4 分）

1. $4x(2x+1)(2x-1)$　　2. 38　　3. $\frac{25}{9}\sqrt{2}$　　4. 4　　5. $-\sqrt{29}$　　6. $\frac{1}{9}\le a\le 3$

7. $\frac{22}{7}$　　8. **8**　　9. $y=\frac{1}{2}x-1$　　10. 0　　11. $\sqrt{2}+3$　　12.（32，49）

二、选择题（每题 4 分）

13. C　　14. B　　15. C

三、解答题

16.（本题满分 12 分，每小题 6 分）

（1）x^3+5x+6

$=x^3-x+6x+6$　　（2 分）

$=x(x^2-1)+6(x+1)$　　（4 分）

$=x(x+1)(x-1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+6)$　　（6 分）

（2）设 $\frac{x-1}{x^2}=y$，则 $\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{y}$，∴原方程可化为：$y-\frac{5}{y}=4$　　（2 分）

整理得：$y^2-4y-5=0$，解得：$y_1=5$，$y_2=-1$

当 $y=5$ 时，$\frac{x-1}{x^2}=5$，即 $5x^2-x+1=0$，该方程无实数解；（4 分）

当 $y=-1$ 时，$\frac{x-1}{x^2}=-1$，即 $x^2+x-1=0$，解得：$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

经检验：$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 是原方程的解.（6 分）

17.（本题满分 12 分）

解：设这对夫妇现在的年龄和为 x，现在所有子女的年龄和为 y，共有 n 个子女（3 分）

由题意得：$\begin{cases}x=6y\\x-4=10(y-2n)\\x+12=3(y+6n)\end{cases}$，（7 分），解得：$\begin{cases}x=84\\y=14\\n=3\end{cases}$　　（10 分）

答：这对夫妇共有 3 个子女.　　（12 分）

18.（本题满分 12 分）

解：（1）由题意得：$\Delta=[2(2a-1)]^2-4a[4(a-3)]=32a+4$，（2 分）

∵方程有两个相等的实数根，

$\therefore 32a+4\geq 0$

解得：$a\geq -\dfrac{1}{8}$，（4 分）

但 $a\neq 0$ ，$\therefore a$ 的最小整数值为 1；（5 分）

（2）由题意得：$ax^2+4ax-2x+4a-12=0$

解得：$a=\dfrac{2x+12}{(x+2)^2}$　　（7 分）

$\because a$ 为正整数，$\therefore a\geq 1$，即 $\dfrac{2x+12}{(x+2)^2}\geq 1$

$\therefore x^2+2x-8\leq 0$，解得：$-4\leq x\leq 2$　（10 分）

$\therefore$整数 x 的值为：-4，-3，-2，-1，0，1，2

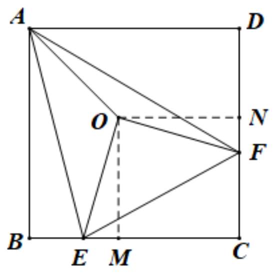
当 $x=-4$ 时，$a=1$
当 $x=-3$ 时，$a=6$
当 $x=-2$ 时，无意义，舍去
当 $x=-1$ 时，$a=10$
当 $x=0$ 时，$a=6$
当 $x=1$ 时，$a=\dfrac{14}{9}$，舍去
当 $x=2$ 时，$a=10$

$\therefore a=1$，$a=3$，$a=6$，$a=10$

（12 分，对 2 个答案得 1 分，4 个答案全对得 2 分）

19.（本题满分 12 分）

（1）证明：如图①，连接 OA、OE、OF



①

$\because O$ 为$\triangle AEF$ 的外接圆的圆心，

$\therefore OA=OB=OC$，

又$\because \angle EAF=45°$，

则$\angle EOF=90°$，

作 $OM\perp BC$，垂足为 M，$ON\perp CD$，垂足为 N，

又$\because \angle BCD=90°$，

$\therefore$四边形 $OMCN$ 为矩形，

∴$\angle MON=90°$，而$\angle EOF=90°$，

∴$\angle EOM=\angle FON$，而$\angle OME=\angle ONF$，$OE=OF$，

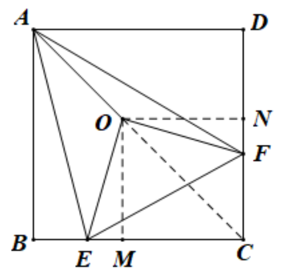
∴$\triangle OEM\cong\triangle OFN$，（4 分）

∴$OM=ON$，而 $OM\perp BC$，$ON\perp CD$，

∴点 O 在$\angle BCD$ 的角平分线上，

∵正方形 $ABCD$，∴A、C、O 三点在同一直线上；（6 分）

（2）解：如图②，由题意得：$OA=OB=OC=R$，



②

∵正方形 $ABCD$ 的边长为 4，则 $AC=4\sqrt{2}$，

∴$OC=4\sqrt{2}-R$，

又∵$\triangle OCM$ 为等腰直角三角形，

可求得 $OM=\dfrac{8-\sqrt{2}R}{2}$；（9 分）

而 $OM\le OE$，

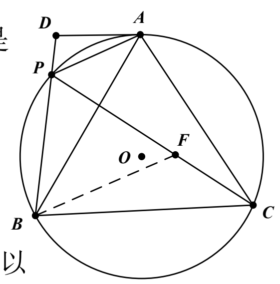
∴ $\dfrac{8-\sqrt{2}R}{2}\le R$

解得：$R\ge 8-4\sqrt{2}$

∴R 的最小值为$8-4\sqrt{2}$.（12 分）

20.(1)因为 AD 是圆 O 的切线，所以 $\angle DAP=\angle DBA$，又因为 $\angle ADP=\angle BDA$，所以 $\triangle ADP\sim\triangle BDA$ ------------------------2 分

（2）$PA+PB=PC$ 证明如下：-------3 分



在线段 PC 上截取 $PF=PB$，连接 BF.因为$\angle BPC=60^{\circ}$，所以 $\triangle PBF$ 是正三角形，所以 $PB=FB,\angle BFP=60^{\circ}$，故$\angle BFC=120^{\circ}$-----5 分

因为 $\angle BPA=\angle APC+\angle BPC=120^{\circ}$，所以 $\angle BPA=\angle BFC$．而 $\angle BAP=BCF$，所以 $\triangle BAP\cong\triangle BCP$，所以 $PA=FC,BA=BC$，所以 $PA+PB=FC+PF=PC$.　-----------------------7 分

（3）因为 $\triangle ADP\sim\triangle BDA$，所以 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DP}{DA}=\dfrac{AP}{BA}$，因为 $AD=2,PD=1$，所以

$BD=4, AB=2AP$,所以 $BP=BD-DP=3$，---------10 分

因为$\angle APD=180^\circ-\angle BPA=60^\circ=\angle APC,\angle DAP=\angle DBA=\angle PCA$，所以

$\Delta APD\sim\Delta CPA$，故$\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{DP}{AP}$，所以 $AP^2=DP\cdot CP=3+AP$，解得 $AP=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，

所以 $BC=AB=2AP=1+\sqrt{13}$------------　　12 分

21.（本题满分 14 分）

问题 1　如图①，过点 B 作 $BP\parallel AC$，交 MN 于点 P，

∵$BP\parallel AC$，

∴$\angle BPO=\angle CNO$，$\angle PBO=\angle NCO$，

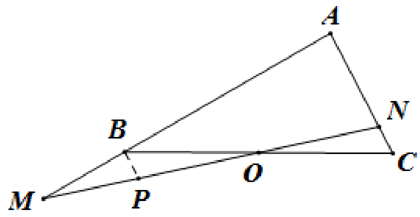
又∵O 为 BC 的中点，

∴$OB=OC$，

∴$\triangle OBP\cong\triangle OCN$，（2 分）

∴$BP=CN$，

∵$BP\parallel AC$，



①

∴$\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{NP}{MN}$，$\dfrac{BP}{AN}=\dfrac{MP}{MN}$

∵$\dfrac{BP}{AN}=\dfrac{MP}{MN}$，$BP=CN$，

∴$\dfrac{CN}{AN}=\dfrac{MP}{MN}$（4 分）

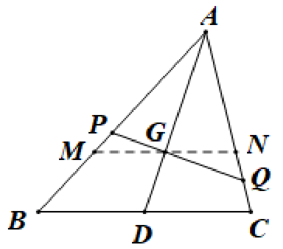
$$\therefore m+n=\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{NP}{MN}+\frac{AN+CN}{AN}$$
$$=\frac{NP}{MN}+1+\frac{CN}{AN}=\frac{NP}{MN}+1+\frac{MP}{MN}$$
$$=1+\frac{NP+MP}{MN}=2(6\text{分})$$

问题 2　（1）如图②，过点 G 作 $MN\parallel BC$，分别交 AB、AC 于点 M、N

∵G 为重心，$MN\parallel BC$，

∴$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{2}{3}$，即 $AM=\dfrac{2}{3}AB, AN=\dfrac{2}{3}AC$，

由问题 1 可知，$\dfrac{AM}{AP}+\dfrac{AN}{AQ}=2$，（8 分）



②

$\therefore \dfrac{\frac{2}{3}AB}{AP}+\dfrac{\frac{2}{3}AC}{AQ}=2$，即 $\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=3$

$\therefore \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=3$（10 分）

（2）

$k=\dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AP\bullet AQ\bullet\sin\angle BAC}{\frac{1}{2}AB\bullet AC\bullet\sin\angle BAC}$（12 分）

$=\dfrac{AP}{AB}\bullet\dfrac{AQ}{AC}=\lambda\bullet\mu$

$\because \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=3$

$\therefore \lambda\mu\geq\dfrac{4}{9}$

$\therefore k$ 的最小值为$\dfrac{4}{9}$（14 分）

22.（本题满分 16 分）

（1）$b=1-3a$，$t=-\dfrac{1}{a}$（4 分）

（2）P（2，-2）或 P（2，$-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$）（8 分）

（3）① $y=\dfrac{a}{2}\left(x+\dfrac{2}{a}\right)(x-6)$ 或 $y=\dfrac{1}{2}ax^2+(1-3a)x-6$（12 分）

② $t=-\dfrac{3}{2}$，M（0，-3）（16 分，各 2 分）