安徽师范大学附属中学2021年高中自主招生考试

数学参考答案

一．选择题(本大题共 6 小题；每小题 5 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把正确答案写在答卷纸的指定位置上)：

1．杨辉三角是二项式$(a+b)^n$展开式中各项系数的一种几何排列．它最早出现在中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中．利用杨辉三角，我们很容易知道$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$．设$(3a-2b)^3=ma^3+na^2b+pab^2+qb^3$，则系数 n＝(▲)．

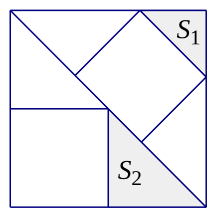
A．54　　B．－54　　C．36　　D．－36

答案：B．

解答：$(3a-2b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(-2b)+3(3a)(-2b)^2+(-2b)^3=27a^2b-54a^2b+36ab^2-8b^3$，故选 B．

2．有 3 个正方形如图所示放置，阴影部分的面积依次记为 S_1，S_2，则 S_1：S_2 等于(▲)．

A．4：9　　B．2：3　　C：1：4　　D．1：2



答案：A．

解答：设 S_1 部分的直角边长为 1，易得大正方形的边长为 3，S_2 的直角边长为 1.5，故面积之比是 4：9．

3．在数轴上点 A、B 对应的数分别是 a、b，点 A 在表示－3 和－2 的两点之间（包括这两点）移动，点 B 在表示－1 和 0 的两点（包括这两点）之间移动，则以下四个代数式的值，可能比 2021 大的是(▲)．

A．$b-a$　　B．$\dfrac{1}{b-a}$　　C．$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$　　D．$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$

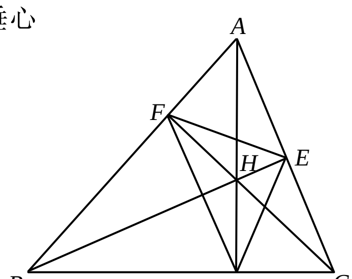
答案：D．

解答：由题意$-3\le a\le -2$，$-1\le b\le 0$．可知：$3\le b-a\le 1$，$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$是负数，只有$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$的值可以超过 2021，如 $a=-2.5$，$b=-0.0001$，故选 D．

4.三角形的四心是指三角形的重心、外心、内心、垂心．三角形的外心是三角形三边的垂直平分线的交点(或三角形外接圆的圆心)，三角形的内心是三角形三条内角平分线的交点(或内切圆的圆心)，三角形的垂心是三角形三边上的高所在直线的交点，三角形的重心是三角形三条中线的交点．三角形的四心具有丰富的数学知识与内在联系．当且仅当三角形是正三角形的时候，重心、垂心、内心、外心四心合一，称作正三角形的中心．如图，H 是$\triangle ABC$ 的垂心，AH、BH、CH 分别交 BC、AC、AB 于 D、E、F，则 H 是$\triangle DEF$ 的(▲)．

A．内心　　B．外心　　C．重心　　D．垂心

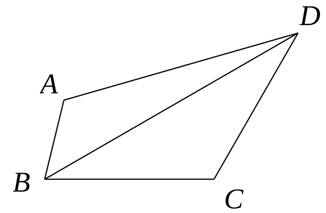
答案：A．



解答：H 是$\triangle ABC$ 的垂心，所以 $AD\perp BC$，$BE\perp AC$，$CF\perp AB$，
所以 A、F、D、C 四点共圆，$\angle FDA=\angle FCA$；
H、D、C、E 四点共圆，$\angle FCA=\angle HCE=\angle HDE$，
故$\angle FDA=\angle HDE$，即 DH 平分$\angle FDE$.
同理：FH 平分$\angle EFD$，EH 平分$\angle FED$，
所以 H 是$\triangle DEF$ 的内心.

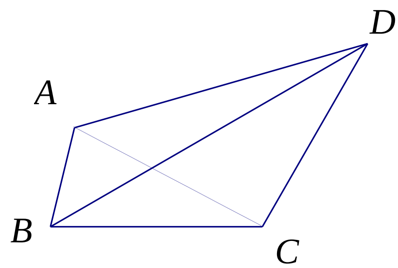
5．在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle BCD=120°$，$BC=CD=10$，则 A、C 两点之间的距离是(▲).

A．9　　B．10　　C．11　　D．不能确定

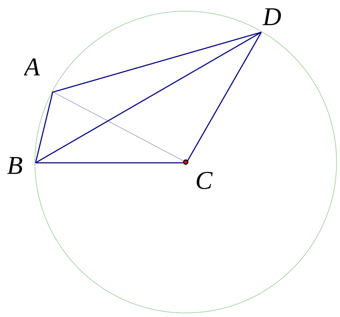


答案：B.

方法一：由四边形内角和可知$\angle ABC+\angle ADC=120°$，
假设 $AC>BC=CD$，则$\angle ABC>\angle BAC$，$\angle ADC>\angle CAD$，
$\angle ABC+\angle ADC>\angle BAC+\angle CAD=\angle BAD=120°$，矛盾；
同理，若 $AC<BC=CD$，则得出$\angle ABC+\angle ADC<120°$，
所以 $AC=10$，故选 B.

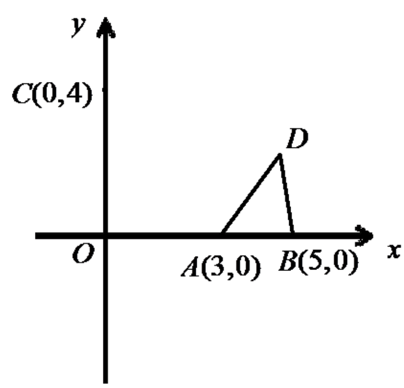


方法二：以 C 为圆心，BC 为半径作圆，
易知点 A 在圆上，故 $AC=10$，故选 B.



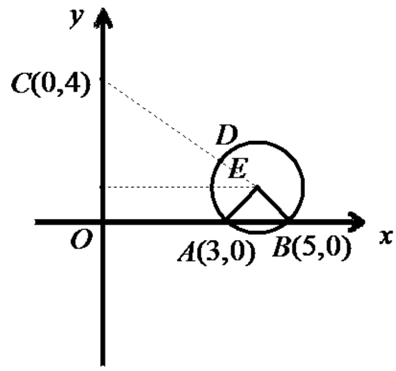
6．若在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，A、B、C 三点的坐标分别为(3，0)，(5，0)，(0，4)，点 D 在第一象限内，且$\angle ADB=45°$．则线段 CD 的长最小值是(▲).

A．5　　B．$5-\sqrt{2}$　　C．$5+\sqrt{2}$　　D．$4-\sqrt{2}$



答案：B．

以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABE，则点 D 在以点 E 为圆心，EA 为半径的圆上，且 $E(4，1)$，$EA=\sqrt{2}$，故 CD 取最小时，D 是 CE 与⊙E 的交点，$CD_{\min}=CE-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$．



二．填空题(本大题共 9 小题；每小题 5 分，共 45 分．请把正确答案写在答卷纸的指定位置上)

7．公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里德把人们公认的一些几何知识作为定义和公理(公设)，在此基础上研究图形的性质，推导出一系列定理，组成演绎体系，写出《几何原本》．它的问世是整个数学发展史上意义极其深远的大事，也是整个人类文明史上的里程碑．在这本书中，欧几里德提出“三角形的内角和是 180°”这一定理，根据这一定理，我们可以得出“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和”的结论．进一步思考：多边形的一个外角和与它不相邻的内角之间又有怎样的关系呢？假设一个 n 边形的某一个外角的度数是 x°，与它不相邻的所有内角的和是 y°，那么 x 与 y 的关系是___▲___．

答案：$y=x+(n-3)\times180$．

解答：多边形的内角和是 $(n-2)\times180$°，假设与这个外角相邻的内角的度数是 a°，那么 $a+x=180$，$a+y=(n-2)\times180$，两式相减得 $y-x=(n-3)\times180$．

8．已知 $\frac{1}{a}-|a|=1$，则 $\frac{1}{a}+|a|=$___▲___．

答案：$\sqrt{5}$．

解答：显然 $a>0$，于是得 $\frac{1}{a}-a=1$，$(\frac{1}{a}+|a|)^2=(\frac{1}{a}+a)^2=(\frac{1}{a}-a)^2+4=5$，故 $\frac{1}{a}+|a|=\sqrt{5}$．

9．设 $\max\{a，b，c\}$ 表示 $a，b，c$ 中最大的一个，例如 $\max\{1，2，x\}=x$，则 $x\geq2$．方程 $\max\{x，x+2，4x-3\}=x^2$ 的解是___▲___．

答案：-1 或者 3．

解答：因为 $x<x+2$，故 $\max\{x，x+2，4x-3\}=x+2$ 或者 $4x-3$

当 $x+2=x^2$，解得，$x=2$ 或者 -1，检验，$x=-1$ 符合要求；

当 $4x-3=x^2$，解得，$x=3$ 或者 1，检验，$x=3$ 符合要求，

所以 $x=-1$ 或者 3．

10．若函数 $y=\frac{1}{2}(x^2-100x+196+|x^2-100x+196|)$，则当自变量 x 取 1、2、3、…、100 这 100 个自然数时，函数值的和是___▲___．

答案：390．

解答：$x^2-100x+196=(x-2)(x-98)$

$y=\frac{1}{2}(x^2-100x+196+|x^2-100x+196|)$，当 $2\le x\le 98$ 时，$y=0$，

当 $x=1$ 或者 99 时，$y=97$，当 $x=100$，$y=196$，

函数值的和是 390．

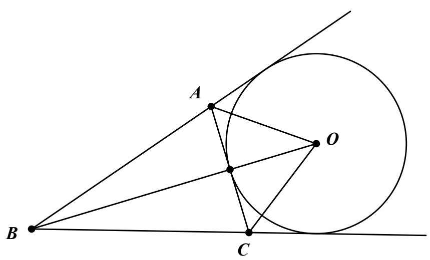
11．已知不相等的实数 a、b 满足 $a^2-3a-1=0$，$b^2-3b-1=0$，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=$___▲___．

答案：-11

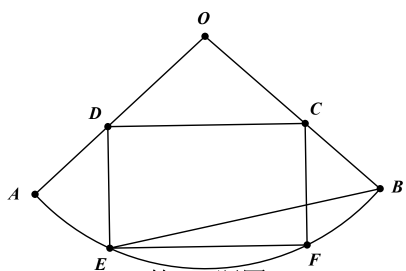
解答：a、b 是 $x^2-3x-1=0$ 的根

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{3^2-2\times(-1)}{-1}=-11$$

12.已知 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的边 AC,BA,BC 的延长线分别相切，若 $\angle BOC=30^\circ$，则 $\angle CAO$ 的度数为__________$^\circ$.60



第 12 题图



第 13 题图

13.如图，扇形 AOB 的圆心角 $\angle AOB=90^\circ$，半径为 5，正方形 $CDEF$ 内接于该扇形，连接 BE，则 $\angle OBE$ 的正切值为__________ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

14．我们引入记号 $f(x)$表示某个函数，用 $f(a)$表示 $x=a$ 时的函数值．例如函数 $y=x^2+1$ 可以记为 $f(x)=x^2+1$，并有 $f(-2)=(-2)^2+1=5$，$f(a+1)=(a+1)^2+1=a^2+2a+2$．

狄利克雷是德国著名数学家，是最早倡导严格化方法的数学家之一．狄利克雷函数

$f(x)=\begin{cases}1，(x\text{是有理数})，\\0，(x\text{是无理数})．\end{cases}$ 的出现表示数学家对数学的理解开始了深刻的变化，从研究"算"到研究更抽象的"概念、性质和结构"．关于狄利克雷函数，下列说法：

①$f(\pi)>f(0)$　　②对于任意的实数 a，$f(f(a))=1$

③对于任意的实数 b，$f(b)=f(-b)$

④存在一个不等于 0 的常数 t，使得对于任意的 x 都有 $f(x+t)=f(x)$

⑤对于任意两个实数 m 和 n，都有 $f(m)+f(n)\ge f(m+n)$．

其中正确的有___▲____（填序号）.

答案：②③④

解答：$f(\pi)=0<f(0)=1$；对于任意的实数 a，$f(a)=0$ 或者 1，都是有理数，$f(f(a))=1$ ；b 和 $-b$ 要么都是有理数要么都是无理数；$t=1$，对于任意的 x，$x+1$ 与 x 要么都是有理数要么都是无理数；取 $m=\pi$，$n=-\pi$，$f(m)+f(n)=0<f(m+n)=f(0)=1$.

15．A、B、C、D 四支足球队进行单循环赛(每两队都要比赛 1 场且只比赛 1 场)，胜一场得 3 分，负 1 场得 0 分，平局各得 1 分．已知：①比赛结果没有两队的积分相同；②B 没有平局，C 平 2 局；③B 净胜球－1 个；④C 净胜球－2 个；⑤D 净胜球 1 个．问 B 与 D 比赛的净胜球数为___▲____ (净胜球＝进球数－失球数).

答案：－2.

解答：从净胜球看，A 队的净胜球为 2 个．所以没有球队三场全胜(否则净胜球至少为＋3 个)，也没有球队三场全负(否则净胜球至多—3)．B 没有平局，故 B 只能两胜一负或者一胜两负，C 有两场平局，净胜球－2，故 C 是两平一负，C 与 A、D 都是平局，输给 B 的比赛是输了两个球．从净胜球看，假设 A 输给了 B，则 B 负于 D，而 A 肯定战胜了 D（否则 A 的净胜球不可能是正数）．这样 A 与 D 积分相同，与题目条件矛盾．所以 A 胜 B，同样可以得出：D 战胜 B．如果 A 与 D 打平，则两队积分一样多，若 D 胜 A，则其净胜球至少 2 个，故 A 战胜 D．A 队两胜一平，净胜球＋2，说明 A 对 D 的净胜球为＋1，考虑到 D 队一胜一平一负，且净胜球为＋1，故 D 胜 B 两球．故问 B 在与 D 比赛中净胜球数为－2.

三．**解答题**(本大题共 7 题，共 75 分，其中第 16 题 7 分、第 17 题 8 分、第 18、19、20、21、22 题每题 12 分，请把正确答案写在答卷纸的指定位置上)

16．求所有的整数 a、b 使之满足 $a^2+3b^2+6<2ab-8b$.

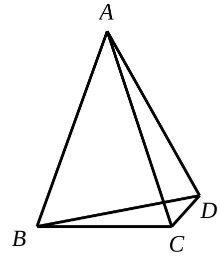
解答：将原不等式变形为 $a^2-2ab+b^2+2b^2+8b+6<0$，

$(a-b)^2+2(b+2)^2<2$ ....3 分

因为 a、b 是整数，所以$(a-b)^2=0$，$(b+2)^2=0$ 或者$(a-b)^2=1$，$(b+2)^2=0$............5 分

所以 $a=b=-2$ 或者 $a=-3$，$b=-2$ 或者 $a=-1$，$b=-2$．............7 分

17．如图凸四边形 $ABCD$，$AB=AC=BD+CD$，$\angle ABD=60°$．求$\angle ACD$ 的度数．



解答：延长 BD 至 E，使得 $DE=CD$，............1 分

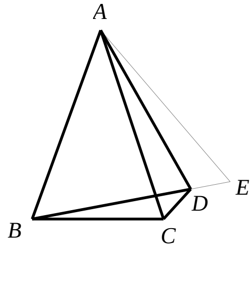
则 $BE=AB$

又$\angle ABD=60°$，

所以$\triangle ABE$ 是等边三角形． ....3 分

$AE=AB=AC$，$\angle E=60°$

易证：$\triangle ADC\cong\triangle ADE$(SSS) ....7 分



$\angle ACD=60°$． ....8 分

18．（1）已知实数 a、b 满足$(a+b)^2=a^2+b^2$，试证明：$(a+b)^n=a^n+b^n$．(n 为正整数，且 $n\geq 3$)

（2）试解下列方程：①$(x^2-3x-4)^2+(2x^2-x-1)^2=(3x^2-4x-5)^2$

②$\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{2x^2-x-1}=\sqrt{3x^2-2x-3}$

解答：（1）由$(a+b)^2=a^2+b^2$，可得 $2ab=0$，$a=0$ 或者 $b=0$．

所以$(a+b)^n=a^n+b^n$．　　　　　　…………2 分

（2）①$x^2-3x-4=a$，　$2x^2-x-1=b$，则 $3x^2-4x-5=a+b$　…………4 分

即$(a+b)^2=a^2+b^2$

由（1）得 $a=0$ 或者 $b=0$，

$x^2-3x-4=0$ 或者 $2x^2-x-1=0$，

解得：$x_1=4$，$x_2=-1$，$x_3=1$，$x_4=-\frac{1}{2}$．　　　　　　…………6 分

②设$\sqrt{x^2-x-2}=a$，$\sqrt{2x^2-x-1}=b$，则$\sqrt{3x^2-2x-3}=a+b$，　……….7 分

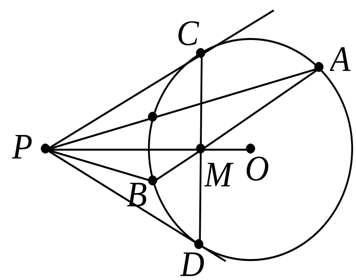
显然$(a+b)^2=a^2+b^2$，故 $a=0$ 或者 $b=0$．

即 $x^2-x-2=0$ 或者 $2x^2-x-1=0$

解得：$x=2$、-1 或者 $x=1$、$-\frac{1}{2}$，　　　　　　…………10 分

经检验可知：方程的解为 $x_1=2$，$x_2=-1$．　　　　　　…………12 分

19．已知 PC、PD 为⊙O 的切线，OP 与 CD 交于 M，弦 AB 经过点 M．求证：PO 平分∠APB．



证明：连 OA、OB、OC、OD

由 $PC=PD$，$CO=DO$

∴PO 垂直平分 CD．　　　　　　…………2 分

由于 $OC\perp PC$，$OD\perp PD$，故 O、C、D、P 四点共圆．

∴$OM\cdot MP=MC\cdot MD$

（或者由 $\triangle PMC\backsim\triangle CMO$ 得 $OM\cdot MP=MC^2=MC\cdot MD$）　…………4 分

根据相交弦定理 $MC\cdot MD=MA\cdot MB$

∴$OM\cdot MP=MA\cdot MB$

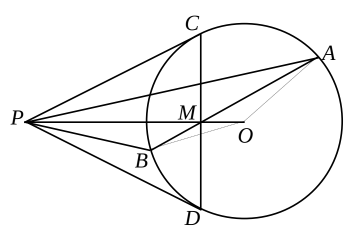
∴O、A、P、B 四点共圆．　　　　…………8 分

∴∠OAB=∠OPB，　∠OBA=∠OPA．

∵$OA=OB$，∴∠OBA=∠OAB，

∴∠APO=∠BPO，

即 PO 平分∠APB．　　　　　…………12 分



20．我们把一个函数图象上横坐标与纵坐标相等的点称为这个函数的不动点．

(1) 求函数 $y=2-x$ 的不动点；

(2) 若函数 $y=\dfrac{3x+8}{x+a}$ 有两个关于原点对称的不动点 A，B，求 a 的值及函数的不动点；

(3)已知函数 $y=ax^2+(b+1)x+(b-1)\ (a\neq 0)$ ．

①当 $a=1$，$b=-2$ 时，求函数的不动点；

②若对任意实数 b，函数恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围．

解：(1)解 $x=2-x$，得 $x=1$，函数 $y=2-x$ 的不动点为(1，1） ....2 分

(2)设点$(x_0，x_0)$是不动点，则有 $\dfrac{3x_0+8}{x_0+a}=x_0$，$x_0^2+(a-3)x_0-8=0$．

由题意知方程有两个根，且这两个根互为相反数．

故 $a-3=0$ 且 $-8<0$， $a=3$． ....4 分

得 $x_0^2=8$， $x_0=\pm 2\sqrt{2}$， $A(2\sqrt{2}，2\sqrt{2})$，$B(-2\sqrt{2}，-2\sqrt{2})$． ....5 分

(3) ①当 $a=1$，$b=-2$ 时，函数 $y=ax^2+(b+1)x+(b-1)=x^2-x-3$，

$x^2-x-3=x$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$

故不动点为(−1，−1)和(3，3)． ....8 分

②对任意实数 b，函数恒有两个相异的不动点，

即 $ax^2+(b+1)x+(b-1)=x$ 恒有两个不相等实数根，$ax^2+bx+(b-1)=0$

即 $\Delta_1=b^2-4a(b-1)=b^2-4ab+4a$ 要恒大于 0 ....10 分

令 $z=b^2-4ab+4a$，这是一个关于 b 的二次函数，

所以 $\Delta_2=16a^2-16a<0$

故 $0<a<1$． ....12 分

21.射影几何的奠基人之一，法国数学家庞斯莱（1788-1867）发明过一种玩具，如图，这种玩具用七根小棍做成，各个连接点均可活动. AF 与 AD 等长，CD,DE,EF,FC 等长，并且 $BC<AD-DC$，使用时，将 A,B 钉牢在平板上，并使 A,B 间的距离等于木棍 BC 的长，绕点 B 转动 C 点，则点 C 在一个圆上运动，E 点就会在一条直线上运动.这样一边画圆一边画直线据此可设计出“狗熊走钢丝”等好玩的游戏.

问题探究：爱玩的小明看到这段材料，就想用数学家制作的这个玩具玩一把，可是身边没有这个玩具，怎么办呢？想了又想，最后他想用几何画板来模拟这个玩具，于是，他用几何画板构造了如图所示的“玩具”，在电脑上玩了起来，确实发现当点 C 在 $\odot B$ 上运动时，点 E 在一条直线上动，而且与 AG 垂直，垂足为 H，怎么来说明这个结论呢？小明百思不得其解时，聪明的考生请你帮帮小明.

问题解决：（1）求证：A,C,E 在一条直线上；（2）求证：点 E 在一定直线上运动.

解答（1）因为 $AF=AD,CD=CF,DE=EF$，所以点 A,C,E 均在线段 DF 的中垂线上,

故 A,C,E 在一条直线上；------------5 分

（2）连结 AE,DF 交于一点 O

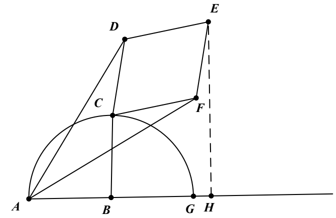
因为 $\triangle ACG\sim\triangle AHE$，所以 $AG\times AH=AC\times AE$ --------------7 分

因为 $AC\times AE=(AO-OC)(AO+OE)=AO^2-OC^2=AD^2-OD^2-OC^2=AD^2-CD^2$

-----10 分

其中 AD,CD,BC 为定值，所以 $AC\times AE$， $AG=2BC$ 均为定值，

所以 AH 为定值.-------------12 分



22．已知 p、q 都是正实数，且 $p\neq\sqrt{3}q$.

(1)证明：$\sqrt{3}$必在$\dfrac{p}{q}$和$\dfrac{p+3q}{p+q}$之间；

(2)请问：$\dfrac{p}{q}$和$\dfrac{p+3q}{p+q}$这两个数，哪一个更接近于$\sqrt{3}$，说明你的理由；

(3)请你再写出一个式子，使得它的值比$\dfrac{p}{q}$和$\dfrac{p+3q}{p+q}$的值更接近于$\sqrt{3}$.

解答：(1)$\left(\dfrac{p}{q}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{p+3q}{p+q}-\sqrt{3}\right)=\dfrac{p-\sqrt{3}q}{q}\times\dfrac{p+3q-\sqrt{3}p-\sqrt{3}q}{p+q}$

$=\dfrac{p-\sqrt{3}q}{q}\times\dfrac{(p-\sqrt{3}q)(1-\sqrt{3})}{p+q}$

$=\dfrac{(p-\sqrt{3}q)^2(1-\sqrt{3})}{q(p+q)}$ ....3 分

因为 $p\neq\sqrt{3}q$，且 p、q 都是正实数，所以$\dfrac{(p-\sqrt{3}q)^2(1-\sqrt{3})}{q(p+q)}<0$，

所以$\dfrac{p}{q}-\sqrt{3}$、$\dfrac{p+3q}{p+q}-\sqrt{3}$必异号，故$\sqrt{3}$必在$\dfrac{p}{q}$和$\dfrac{p+3q}{p+q}$之间. ....5 分

(2)$\left|\dfrac{p}{q}-\sqrt{3}\right|=\left|\dfrac{p-\sqrt{3}q}{q}\right|$，$\left|\dfrac{p+3q}{p+q}-\sqrt{3}\right|=\left|\dfrac{(p-\sqrt{3}q)(1-\sqrt{3})}{p+q}\right|$

因为 $p+q>q$，且$\left|1-\sqrt{3}\right|<1$，所以$\left|\dfrac{p}{q}-\sqrt{3}\right|>\left|\dfrac{p+3q}{p+q}-\sqrt{3}\right|$， ....7 分

即$\dfrac{p}{q}$和$\dfrac{p+3q}{p+q}$这两个数中，$\dfrac{p+3q}{p+q}$更接近于$\sqrt{3}$； ....9 分

(2) 在$\dfrac{p+3q}{p+q}$中，把 $p+3q$ 看成 p，把 $p+q$ 看成 q，利用(2)的结论，则

$\dfrac{(p+3q)+3(p+q)}{(p+3q)+(p+q)}$即$\dfrac{4p+6q}{2p+4q}$比$\dfrac{p+3q}{p+q}$更接近于$\sqrt{3}$. ....12 分