安师大附中2020年高中自主招生考试数学试题

注意事项：

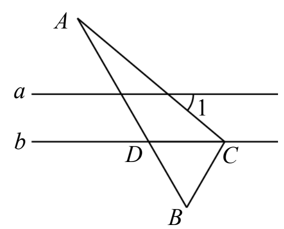
1．本试卷总分150分，考试时间120分钟。

2．答案一律用0.5mm黑色签字笔和2B铅笔写在答题卷上，在本试卷上答题无效。

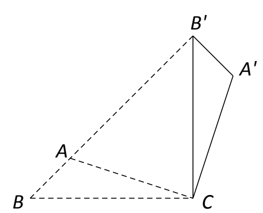
一、填空题（本大题共有 12 小题，每小题 4 分，共计 48 分.）

1.因式分解：$16x^3$-4x=___▲___.

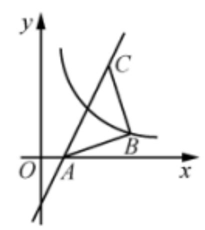
2.如图，直线 $a//b$，△ABC 的顶点 C 在直线 b 上，边 AB 与直线 b 相交于点 D.若△BCD 是等边三角形，∠A=22°，则∠1=___▲___°.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3.如图，△ABC 中，∠BAC >90°，BC=5，将△ABC 绕点 C 按顺时针方向旋转90°，点 B 的对应点 B' 落在 BA 的延长线上，若 $\sin\angle B'AC=\frac{9}{10}$，则 $AC=$___▲___.

4.如图，过点 C（3，4）的直线 $y=2x+b$ 交 x 轴于点 A，∠ABC=90°，AB=CB，曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 过点 B，则 k 的值为___▲___.

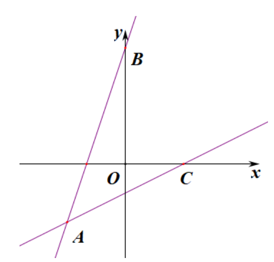
5. 若 $ab<0$，$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=5$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值为___▲___.

6. 已知点 A（0，2）与点 B（2,4）的坐标，抛物线 $y=ax^2-6ax+9a+1$ 与线段 AB 有交点，则 a 的取值范围是___▲___.

7. 我国南北朝数学家何承天发明的“调日法”是程序化寻求精确分数来表示数值的算法，其理论依据是：设正实数 x 的不足近似值和过剩近似值分别为$\frac{b}{a}$和$\frac{d}{c}$(a，b，c，d 都为正整数)，即$\frac{b}{a}<x<\frac{d}{c}$，则$\frac{b+d}{a+c}$是 x 的更精确的不足近似值或过剩近似值.已知 π=3.14159…，且$\frac{31}{10}<\pi<\frac{16}{5}$，则第一次使用“调日法”后得到 π 的近似分数是$\frac{47}{15}$，它是 π 的更为精确的不足近似值，即$\frac{47}{15}<\pi<\frac{16}{5}$.那么第三次使用“调日法”后得到 π 的近似分数是___▲___.

8.已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+k=0$ 无实数根，则直线 $y=(k-4)x+k$ 与坐标轴围成的三角形面积最小值为___▲___.

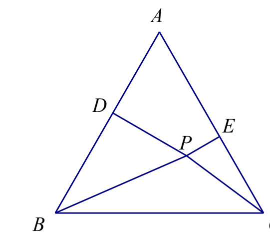
9.如图，在平面直角坐标系中，直线AB交y轴于点B（0，4)，现将直线AB绕点A（-2，-2）顺时针方向旋转45°交x轴于点C，则直线AC的函数表达式是___▲___.



（第 9 题）

10.已知不全相等的非零实数 a,b,c 满足 $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$，则 $a+b+c=$___▲___.

11.如图，点 P 是等边△ABC 内一点，∠BPC=120°，PD⊥AB 于 D，PE⊥AC 于 E，PD=2，PE=1,则等边△ABC 的高为___▲___.



（第 11 题）

12.把所有正奇数从小到大排列，并按以下规律分组：(1)，(3，5，7)，(9，11，13，15，17)，(19，21，23，25，27，29，31)，…，现有等式 A_m=（i，j）表示正奇数 m 是第 i 组第 j 个数（从左往右数），如 A_7=（2，3），则 A_{2019} 的值为___▲___.

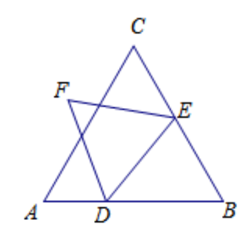
二、选择题（本大题共有 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分.）

13.设 $A=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2020^2}+\frac{1}{2021^2}}$,则不超过 A 的最大整数为（ ▲ ）

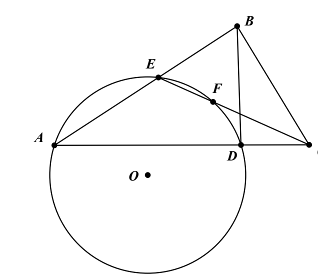
A.2022 B.2021 C.2020 D.2019

14.如图，△ABC 是边长为 6 的等边三角形，点 D 在边 AB 上，AD=2，点 E 是 BC 上一点，连接 DE，将 DE 绕点 D 逆时针旋转 60°得 DF，连接 CF，则 CF 的最小值为（ ▲）

A.2 B.$\sqrt{3}$ C.$2\sqrt{3}-2$ D.$6-3\sqrt{3}$



（第 14 题）



（第 15 题）

15.如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$BD\perp AC$，过 A,D 两点的圆交 BA 于 E，交 CE 于点 F，若 $BE=3,BC=4$，则 BF 的长度是（ ▲ ）

A.$\frac{4}{5}$ B.5 C.$\frac{12}{5}$ D.$\frac{16}{5}$

三、解答题（本大题共有 7 小题，共计 90 分．）

16.（每题 6 分，共 12 分）

（1）因式分解：x^3+5x+6

（2）解方程：$\dfrac{x-1}{x^2}-\dfrac{5x^2}{x-1}=4$

17.（12 分）一对夫妇现在年龄的和是其子女年龄和的 6 倍，他们两年前年龄和是这些子女两年前年龄和的 10 倍，6 年后他们的年龄和是这些子女年龄的 3 倍，求这对夫妇共有多少个子女？

18.（12 分）已知关于 x 的二次方程 $ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$

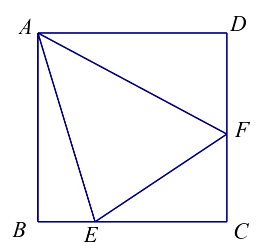
（1）若方程有两个实数根，求满足条件 a 的最小整数值；

（2）若方程至少有一整数根，求正整数 a 的值.

19.（12 分）如图，点 E、F 是正方形 $ABCD$ 边上的点，且$\angle EAF=45°$，若$\triangle AEF$ 的外接圆的圆心为 O，半径为 R.

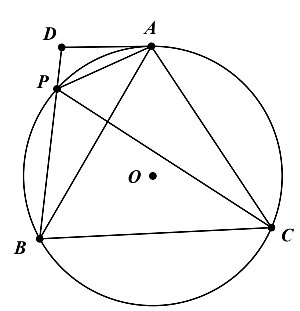
（1）求证：A、C、O 三点在同一条直线上；

（2）若正方形 $ABCD$ 的边长为 4，求 R 的最小值.



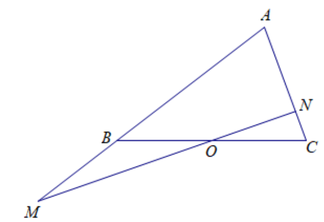
（第 19 题）

20.（12 分）如图，A,P,B,C 是$\odot O$ 上的四个点，$\angle APC=\angle BPC=60^\circ$，过点 A 作$\odot O$ 的切线，交 BP 的延长线于点 D.（1）求证：$\Delta ADP\sim\Delta BDA$；（2）试探究 PA,PB,PC 之间的数量关系，并证明你的结论；（3）若 $AD=2,PD=1$ 求线段 BC 的长.



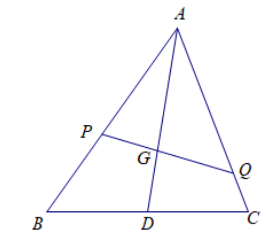
（第 20 题）

21.（14 分）问题 1 如图 1，点 O 是$\triangle ABC$ 中 BC 边的中点，过点 O 的直线分别交直线 AB、AC 于点 M、N，且 $\dfrac{AB}{AM}=m,\dfrac{AC}{AN}=n$.求证：$m+n=2$.



（图 1）

（第 21 题）



（图 2）

问题 2 如图 2，点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，过点 G 的直线交$\triangle ABC$ 的 AB、AC 边于 P、Q 两点，设 $\dfrac{AP}{AB}=\lambda$，$\dfrac{AQ}{AC}=\mu$.（1）探究：λ 与 μ 之间的数学关系式；

（2）运用：若$\triangle APQ$ 与$\triangle ABC$ 的面积之比为 k，求 k 的最小值.

22.（16 分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C_1：$y=ax^2+bx+c(a>0)$经过点 $A(0，-3)$、$B(3，0)$和 $D(t，0)$.

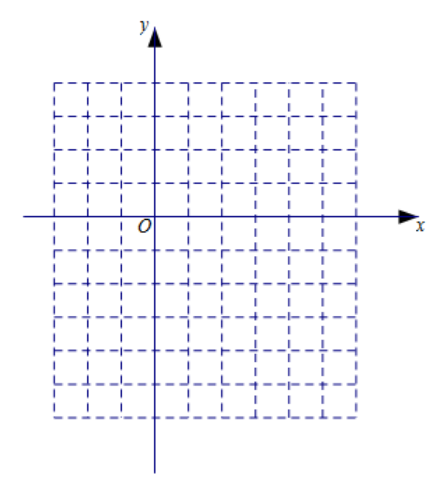
（1）用含 a 的代数式表示求 b 与 t；

（2）若直线 $x=2$ 与此抛物线交于点 P，OP 平分$\angle APB$，求点 P 坐标；

（3）若以 O 为位似中心，将$\triangle ABD$ 放大后得$\triangle A'B'D'$，其中 $A'(0，-6)$，$B'(6，0)$，抛物线 C_2 过 A'、B'、D'.

①用 a 表示抛物线 C_2 的表达式；

②抛物线 C_2 与 x 轴的交点为 D'，过点 O 的直线交 x 轴下方的抛物线 C_1，C_2 分别为 M、M'，若$\triangle M'BB'\backsim\triangle MDD'$，请直接写出点 M 的坐标与 t 的值.



（第 22 题）