2019 高中自主招生数学试题

参考答案

一、选择题

1、B　2、A　3、C　4、C

二、填空题

5、4　6、$\frac{1}{3}$　7、8　8、-1　9、505

10、$\begin{cases} x=-5 \\ y=7 \end{cases}$　11、43　12、$2-\frac{\pi}{2}$

13、$\frac{9}{2}$　14、24 或 84　15、$\sqrt{5}$

16、60　17、$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　18、17

三、解答题

19、解：Q $\begin{cases} a+b+ab=3 \\ (a+b)^2-2ab=2 \end{cases}$，

$\therefore (a+b)^2+2(a+b)=8$，

$\therefore a+b=2$ 或 $a+b=-4$.………… 6 分

当 $a+b=2$ 时，$ab=1$，$\therefore a=b=1$，

当 $a+b=-4$ 时，$ab=7$，此时实数 a、b 不存在.……………………………………8 分

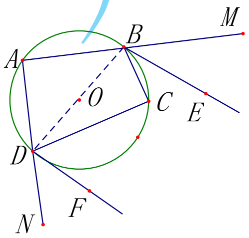
$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=2$.…………… 10 分

20、证明：连接 BD

∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴∠ABC+∠ADC=180°，

∠A+∠C=180°．



∴∠MBC+∠NDC=180°，

∵BE 平分∠MBC，∴∠EBC=$\frac{1}{2}$∠MBC，

∵DF 平分∠NDC，∴∠FDC=$\frac{1}{2}$∠NDC，

∴∠EBC+∠FDC=$\frac{1}{2}$∠NDC +$\frac{1}{2}$∠MBC

=90°，……………………………………6 分

∵BE∥DF，∴∠EBD+∠FDB=180°，

∴∠DBC+∠BDC=90°，∴∠C=90°，

∴∠A=90°.…………………………10 分

21、(1) ①$2\sqrt{6}$ ……………………………2 分

②± 3 ……………………………………………4 分

(2) 2x-1…………………………………………6 分

(3) ①∵$x_2-x_1>0$，∴$f(x_2-x_1)>1$，

∵$f(x_2)=f(x_1+x_2-x_1)$

$=f(x_1)+f(x_2-x_1)-1$，

∴$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$，

∴$f(x_2)>f(x_1)$.

②∵$f(0)=f(0)+f(0)-1$，

∴$f(0)=1$，……………………………8 分

∵$f(2)=f(1)+f(1)-1=2f(1)-1$，

$f(3)=f(2)+f(1)-1=3f(1)-2$，

$f(4)=f(3)+f(1)-1=4f(1)-3$，

……

$f(2019)=2019f(1)-2018$.

∴$2019f(1)-2018=2020$，

∴$f(1)=2$.…………………………12 分

$f(x)=x+1$…………………………14 分

22、（1） $y=x^2+2mx+m^2+m-5$…4 分

（2）∵ $y=x^2+2mx+m^2+m-5$

$=(x+m)^2+m-5$，

∴顶点 C 的坐标为（$-m$，$m-5$）

∵ $OC^2=m^2+(m-5)^2$

$=2m^2-10m+25$

$=2\left(m-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}$ ………………………6 分

∵ $m\geq 3$ 且为整数，当 $m>\dfrac{5}{2}$ 时，OC^2 随 m 的增大而增大，∴当 $m=3$ 时，OC^2 最小，最小值为 13，

∴OC 的最小值为 $\sqrt{13}$.………………8 分

（3）∵ $y_0<0$，抛物线的开口向上，

∴抛物线的顶点在 x 轴的下方，∴ $m-5<0$

∴ $3\leq m<5$ 的整数，∴$m=3$ 或 4.

当 $m=3$ 时，点 P 的坐标为（-4，-1）或（-3，-2）；……………………………………10 分

当 $m=4$ 时，点 P 的坐标为（-4，-1）

综上所述：当 $m=3$ 时，点 P 的坐标为（-4，-1）或（-3，-2）；当 $m=4$ 时，点 P 的坐标为（-4，-1）…………………………………12 分

23、证明：设 PB、PA 所对应的函数关系式分别为：$y=k_1x+b_1$，$y=k_2x+b_2$，分别过 A、B 作 $AH\perp x$ 轴于 H，$BK\perp x$ 轴于 K，

设点 P、B 的横坐标分别为 x_1、x_2，则 A 点的横坐标为 $-x_2$，由 $\begin{cases}y=\dfrac{k}{x}\\ y=k_1x+b_1\end{cases}$

得 $k_1x^2+b_1x-k=0$，

∴ $x_1+x_2=-\dfrac{b_1}{k_1}$，∴ $x_1=-\dfrac{b_1}{k_1}-x_2$，∵ $D\left(-\dfrac{b_1}{k_1},0\right)$

∴ $x_1=DK$ ………………………………4 分

由 $\begin{cases}y=\dfrac{k}{x}\\ y=k_2x+b_2\end{cases}$ 得 $k_2x^2+b_2x-k=0$，

∴ $x_1+(-x_2)=-\dfrac{b_2}{k_2}$，

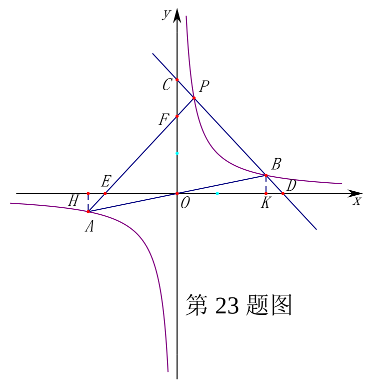
∴ $x_1=-\dfrac{b_2}{k_2}-(-x_2)$，

∵ $E\left(-\dfrac{b_2}{k_2},0\right)$，∴ $x_1=EH$ ……………8 分

∴ $DK=EH$，∵A、B 关于原点 O 对称，∴ $BK=AH$，∴△BDK≌△AEH，∴∠BDK=∠AEH，∵∠AEH=∠PED，

∴∠BDK=∠PED，

∴$PD=PE$.………………………………10 分



第 23 题图

24、（1）证明：连接 DF、CE，设它们的交点为 O，

∵四边形 $DCFE$ 是菱形，∴CE 是 DF 的垂直平分线，

∵$AD=AF$，∴A 在 DF 的垂直平分线 CE 上，

∴A、C、E 三点在同一直线上.…… 4 分

（2）证明：连接 CG，过 E 点作 $EH\perp AG$ 于 H，∵AG 为⊙B 的直径，∴$\angle ACG=90°$，

∴$\angle ACG=\angle AHE$，∵$\angle CAG=\angle HAE$，

∴$\triangle ACG\backsim\triangle AHE$，

∴ $\dfrac{AG}{AE}=\dfrac{AC}{AH}$，∴ $AG\cdot AH=AC\cdot AE$，

∵ $AC\cdot AE=(AO-OC)\cdot(AO+OE)$

$=(AO-OC)\cdot(AO+OC)$，

$=AO^2-OC^2$，

又∵ $AO^2=AD^2-OD^2$，

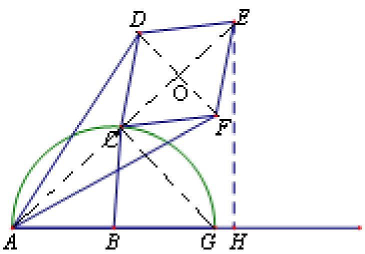
$OC^2=CD^2-OD^2$，

∴ $AG\cdot AH=AC\cdot AE=AD^2-CD^2$

∵ $AG=2BC$，∴ $AH=\dfrac{AD^2-CD^2}{2BC}$，

∵AD、CD、BC 的长均为固定的长，∴AH 的长是固定的，∴H 在 AG 上的位置是固定的，而过 H 点与 AG 垂直的直线只有一条，

∴点 E 在一直线上运动.………………10 分



第 24 题图

25、（1）证明：∵$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle ACB$，

∵$BD=BC=CE$，

∴ $\angle BDC=\dfrac{180°-\angle ABC}{2}$，

$\angle EBC=\dfrac{180°-\angle ACB}{2}$，

∴$\angle BDC=\angle EBC$.∵$\angle OCB=\angle BCD$，

∴$\triangle OBC\backsim\triangle BDC$.……………………4 分

（2）连接 DE

∵$AB=AC$，$DB=CE$，∴$AD=AE$，

∴$\angle ADE=\angle AED=\dfrac{180°-\angle A}{2}$，

∵$\angle ABC=\dfrac{180°-\angle A}{2}$，∴$\angle ADE=\angle ABC$，

∴$DE\parallel BC$.

∴ $\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AC-BC}{AC}$

$=\dfrac{kBC-BC}{kBC}=\dfrac{k-1}{k}$，

∴ $OD=\dfrac{k-1}{k}OC$，

∵$\triangle OBC\backsim\triangle BDC$，

∴ $BC^2=OC\cdot CD=OC^2+OC\cdot OD$

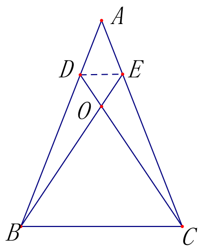
$=\dfrac{2k-1}{k}OC^2$，

∴ $\dfrac{OC}{BC}=\sqrt{\dfrac{k}{2k-1}}$，……………………8 分

∵k 与 $2k$-1 互质，∴k、$2k$-1 均为平方数，

∵k>1，

∴当 k=4、9、16、25 时，$2k$-1 分别为 7、17、31、49，∴k 的最小值为 25.……12 分



第 25 题图