

安师大附中 2019 年高中自主招生考试数学试题

注意事项:

1. 本试卷总分150分, 考试时间120分钟。
2. 答案一律用0.5mm黑色签字笔和2B铅笔写在答题卷上, 不能写在本试卷上。

一、选择题 (每题4分, 共16分)

1. 函数 $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是 (▲)

- A. $x \geq 1$ B. $x \neq 2$ C. $x > 1$ 且 $x \neq 2$ D. $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$

2. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-\frac{1}{2}, 2)$, 则 k^{2019} 的值为 (▲)

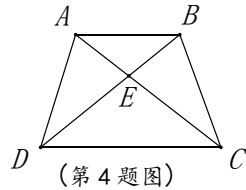
- A. -1 B. 1 C. -4 D. 4

3. 计算: $\sqrt{11+4\sqrt{7}} + \sqrt{11-4\sqrt{7}}$ 的结果等于 (▲)

- A. 4 B. $\sqrt{22}$ C. $2\sqrt{7}$ D. 3

4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 E , 已知 $\triangle ABE$ 的面积为 a , $\triangle CDE$ 的面积为 b , 则四边形 $ABCD$ 的面积为 (▲)

- A. $a^2 + b^2$ B. $(a+b)\sqrt{a}$ C. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ D. $(a+b)^2$



二、填空题 (每题4分, 共56分)

5. 若抛物线 $y = x^2 - 4x + m$ 的顶点在 x 轴上, 则 $m =$ ▲.

6. 已知: a, b 为实数, 且 $a^2 + 4a + \sqrt{b-3} = -4$, 则 $\sqrt{b^a} =$ ▲.

7. 已知: $x + 3y = 1$, 则 $x^2 - 9y^2 + 6y + 7 =$ ▲.

8. 若单项式 $-2a^{|x|}b^{|y|}$ 与 $3^2 a^2 b^{3-x}$ 的次数相同, 则 x 的整数值为 ▲.

9. 边长为整数, 且周长为 2019 的等腰三角形有 ▲ 个.

10. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = 16 \\ a_2x + b_2y = 15 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$, 则关于 x, y 的方程组

$\begin{cases} a_1x + b_1y = 32 - a_1 + b_1 \\ a_2x + b_2y = 30 - a_2 + b_2 \end{cases}$ 的解为 ▲.

11. 已知: 方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根分别为 α, β , 则 $\alpha^3 + 10\beta - 10\alpha\beta =$ ▲.

12. 由一次函数 $y = -x + 2$ 的图象与坐标轴围成的三角形未被圆心在 $(1, 1)$ 半径为 1 的圆覆盖的面积等于 ▲.

13、若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} -x+4m < x+10 \\ x+1 > m \end{cases}$ 的解集是 $x > 4$ ，则 m 的值为 ▲ 。

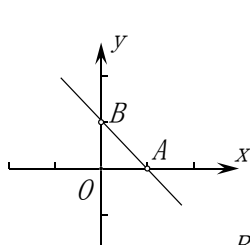
14、在 $\triangle ABD$ 中， AC 是 BD 边上的高，且 $BC=9$ ， $DC=5$ ，若 $AB+AD=28$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积为 ▲ 。

15、如图，一束光线从点 O 射出照在经过 $A(1,0)$ ， $B(0,1)$ 的镜面上的点 D ，经过 AB 反射后，反射光线又照到竖立在 y 轴位置的镜面，要使最后经过 y 轴再反射的光线恰好通过点 A ，则光线所走过的路线长为 ▲ 。

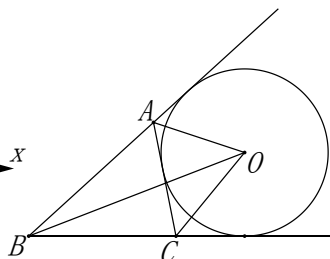
16、已知， $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的边 AC 及 BA 、 BC 的延长线分别相切，若 $\angle BOC=30^\circ$ ，则 $\angle CAO$ 的度数为 ▲ °。

17、如图，扇形 AOB 的圆心角 $\angle AOB=90^\circ$ ，半径为 5，正方形 $CDEF$ 内接于该扇形，连接 BE ，则 $\angle OBE$ 的正切值为 ▲ 。

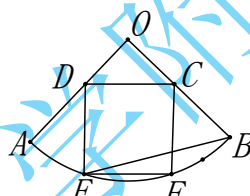
18、如图，点 O 为矩形 $ABCD$ 的中心， $AB=8$ ， $BC=6$ ， $\odot B$ 的半径为 2，点 P 是 $\odot B$ 上一个动点，则 $\triangle AOP$ 面积的最大值为 ▲ 。



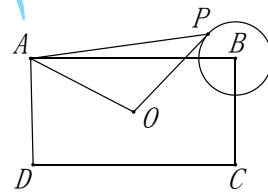
(第 15 题图)



(第 16 题图)



(第 17 题图)

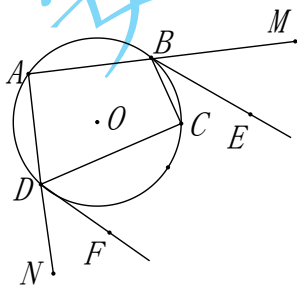


(第 18 题图)

三、解答题（本大题共 7 大题，共 78 分）

19、（本题满分 10 分）已知实数 a 、 b 满足 $a+ab+b=3$ ， $a^2+b^2=2$ ，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值。

20、（本题满分 10 分）如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， BE 、 DF 分别是其外角 $\angle MBC$ 与外角 $\angle NDC$ 的角平分线，且 $BE \parallel DF$ ，求证： $\angle A=90^\circ$ 。



(第 20 题图)

21、(本题满分 14 分) 阅读理解: 我们知道变量 y 是变量 x 的函数的解析法表示就是用 x 的代数式来表示 y , 如 $y = 2x - 3$ 、 $y = \frac{4}{x}$ 、 $y = x^2 - 3$ 等, 数学家欧拉是这样来表示函数的, 如函数 $y = 2x - 3$, 表示为 $f(x) = 2x - 3$; 函数 $y = \frac{4}{x}$ 表示为 $f(x) = \frac{4}{x}$. 在函数 $y = 2x - 3$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = -3$, 可表示为 $f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$.

解答问题: (1) 已知: 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, ①则 $f(5) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

②若 $f(x) = 2\sqrt{2}$, 则 $x = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

(2) 若 $f(x-2) = 2x - 5$, 则 $f(x) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

(3) 已知函数 $y = f(x)$ 满足 (I) $f(m+n) = f(m) + f(n) - 1$; (II) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$.

请解答下列问题: ①当 $x_2 > x_1$ 时, 求证: $f(x_2) > f(x_1)$;

②若 $f(2019) = 2020$, 求 $f(1)$ 的值并直接写出函数 $y = f(x)$ 关系式.

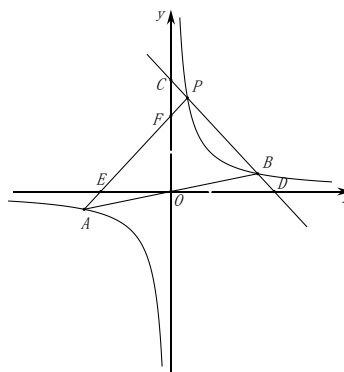
22、(本题满分 12 分) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, m^2 + m - 5)$, $B(-1, m^2 - m - 4)$, 其中 $m \geq 3$, 且 m 为整数.

(1) 求这个抛物线的解析式 (用含 m 的代数式表示);

(2) 求坐标原点 O 与抛物线的顶点 C 间的最短距离;

(3) 设点 $P(x_0, y_0)$ 是这个二次函数图象上的一个动点, 当 $m - 8 \leq x_0 \leq 2m - 9$, y_0 为负整数时, 求 m 的值及点 P 的坐标.

23、(本题满分 10 分) 已知: 如图, P 点是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 上一点, 直线 PA 交双曲线于另一点 A , 分别交 x 轴、 y 轴于点 E 、 F , 直线 PB 交双曲线于另一点 B , 分别交 x 轴、 y 轴于点 D 、 C , 且 A 、 B 两点关于原点对称. 求证: $PE = PD$.



(第 23 题图)

24、(本题满分 10 分) 射影几何的奠基人之一、法国数学家庞斯莱 (1788--1867) 发明过一种玩

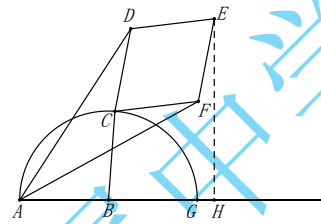
具,如图,这种玩具用七根小棍做成,各个连接点均可活动, AF 与 AD 等长, CD 、 DE 、 EF 、 FC 等长,并且 $BC < AD - DC$,使用时,将 A, B 钉牢在平板上,并使 A, B 间的距离等于木棍 BC 的长,绕点 B 转动 C 点,则点 C 在一个圆上运动, E 点就会在一条直线上运动.这样一边画圆一边画直线据此可设计出“狗熊走钢丝”等好玩的游戏.

问题探究

爱玩的小明看到这段材料,就想用数学家制作的这个玩具玩一把,可是身边没有这个玩具,怎么办呢?想了又想,最后他想用几何画板来模拟这个玩具,于是,他用几何画板构造了如图所示的“玩具”,在电脑上玩了起来,确实发现当点 C 在 $\odot B$ 上运动时,点 E 在一条直线上运动,而且与 AG 垂直,垂足为 H ,怎么来说明这个结论呢?小明百思不得其解时,聪明的考生请您帮帮小明.

问题解决

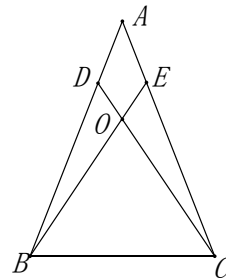
- (1) 求证: A, C, E 在一条直线上;
- (2) 求证: 点 E 在一定直线上运动.



(第 24 题图)

25、(本题满分 12 分) 在等腰 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=AC=kBC$, k 为大于 1 的整数,点 D, E 分别在 AB, AC 上,且 $DB=BC=CE$, CD 与 BE 相交于 O .

- (1) 求证: $\triangle OBC \sim \triangle BDC$;
- (2) 当 $\frac{OC}{BC}$ 为有理数时, 求 k 的最小值.



(第 25 题图)